INSTITUT DE STATISTIQUE de l'Université Pierre et Marie Curie

Concours d'entrée
6 et 7 juin 1995

Epreuve de mathématiques II
Durée 4 heures

Le sujet comporte 3 parties qui sont indépendantes.

Notations. Dans tout le sujet, d désigne un entier naturel strictement positif. On identifiera un élément x de $\mathbb{R}^d$ à un vecteur colonne. $\mathbb{R}^d$ est muni du produit scalaire euclidien usuel noté $< \cdot, \cdot >$ et défini par $< x, y >= {}^t xy$ pour $(x, y) \in (\mathbb{R}^d)^2$, où ${}^t x$ désigne le transposé du vecteur colonne x.
Si A est une matrice $d \times d$, on notera :

- $A_{i,j}$ l'élément de A situé à l'intersection de la ligne numéro i et de la colonne numéro j,
- ${}^t A$ la transposée de A,
- $\text{trace}(A) = \sum_{i=1}^{d} A_{i,i}$ la trace de A,
- $\det A$ le déterminant de A.

L'ensemble des matrices $d \times d$ à coefficients réels qui sont symétriques est noté $\mathcal{S}_d$ et le sous-ensemble de $\mathcal{S}_d$ constitué des matrices qui sont définies positives est noté $\mathcal{S}_d^+$. On rappelle qu'une matrice A de $\mathcal{S}_d$ est dite positive si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \quad < x, Ax > \geq 0\,,$$

et qu'elle est dite définie positive si elle vérifie en plus :

$$< x, Ax >= 0 \Longleftrightarrow x = 0.$$

On rappelle aussi qu'une matrice de $\mathcal{S}_d^+$ est toujours inversible.

Dans la partie I nous étudions la fonction

$$(A, B) \longrightarrow \varphi(A, B) = \text{ trace}(AB)$$

définie de $\mathcal{S}_d \times \mathcal{S}_d$ dans $\mathbb{R}$. Dans les parties II et III nous étudions la fonction

$$A \longrightarrow \gamma(A) = (\det A)^r \exp(\text{ trace } (A^{-1}B))$$

définie de $\mathcal{S}_d^+$ dans $\mathbb{R}$ où r est un nombre réel strictement positif fixé et B est un élément de $\mathcal{S}_d^+$ fixé ($\exp(\cdot)$ désigne la fonction exponentielle classique).

PARTIE I

1) Montrer que $\mathcal{S}_d$ muni de la somme des matrices et du produit d'une matrice par un scalaire est un espace vectoriel.

2) Montrer, en explicitant une base de $\mathcal{S}_d$, que cet espace vectoriel est de dimension égale à $d(d+1)/2$ (on pourra commencer par traiter le cas $d = 2$).

3) a) Montrer que $\varphi(A, B) = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} A_{i,j} B_{i,j}$.

   b) En déduire que φ est une forme bilinéaire symétrique positive sur $\mathcal{S}_d \times \mathcal{S}_d$.

4) a) On suppose que $A \in \mathcal{S}_d$. Montrer que A^2 est une matrice diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives ou nulles.

   b) Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{S}_d$.

5) Trouver une base orthonormée de $\mathcal{S}_d$ muni du produit scalaire φ (on pourra commencer par traiter le cas $d = 2$).

6) a) Dans cette question, A et B sont deux matrices fixées de $\mathcal{S}_d$, avec $A \neq 0$. Trouver le réel λ qui minimise la quantité $\varphi(B - \lambda A, B - \lambda A)$. En déduire l'expression du projecteur orthogonal sur la droite vectorielle engendrée par A.

   b) Montrer que le sous-ensemble $\mathcal{B}$ de $\mathcal{S}_d$ constitué des matrices symétriques de trace nulle est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}_d$. Préciser sa dimension et donner l'expression du projecteur orthogonal sur ce sous-espace vectoriel.

7) Montrer que $(\text{trace}(AB))^2 \leq \text{trace}(A^2)\text{trace}(B^2)$.

PARTIE II

1) Lorsque $d = 1$, trouver l'unique minimum dans $\mathcal{S}_1^+ =]0, \infty[$ de la fonction $A \longrightarrow \gamma(A)$.

2) Pour d quelconque, et λ réel, calculer $\gamma(\lambda B)$ en fonction de λ, r et $\det B$. Vérifier que la fonction $\lambda \longrightarrow \gamma(\lambda B)$ atteint son minimum global en $\lambda = 1/r$.

3) On suppose ici que $d = 2$ et on cherche des extrema sur $\mathcal{S}_2^+$ de la fonction γ. Pour cela, on introduit la fonction

$$A \longrightarrow \Gamma(A) = (\det A)^{-r} \exp(\text{ trace}(AB))$$

définie de $\mathcal{S}_2^+$ dans $\mathbb{R}$. On note $\psi(A) = {}^t(A_{1,1}, A_{1,2}, A_{2,2})$ pour $A \in \mathcal{S}_2$.

   a) Montrer que ψ est une application linéaire bijective de $\mathcal{S}_2$ dans $\mathbb{R}^3$ et déterminer $\psi\left(\mathcal{S}_2^+\right)$.

   b) Soit $\tilde{\Gamma}$ la fonction définie de $\psi\left(\mathcal{S}_2^+\right)$ dans $\mathbb{R}$ par les relations $x = \psi(A)$ et $\tilde{\Gamma}(x) = \Gamma(A)$. Exprimer $\tilde{\Gamma}(x)$ en fonction des coordonnées de x.

c) Montrer que :

$$\frac{\partial\tilde{\Gamma}}{\partial A_{1,1}}(x) = \left(B_{1,1} - \frac{rA_{2,2}}{A_{1,1}A_{2,2} - A_{1,2}^2}\right)\Gamma(A)\,,$$

et calculer de même $\dfrac{\partial\tilde{\Gamma}}{\partial A_{2,2}}(x)$ et $\dfrac{\partial\tilde{\Gamma}}{\partial A_{1,2}}(x)$.

d) En déduire que :

$$\frac{\partial\tilde{\Gamma}}{\partial A_{1,1}}(x) = \frac{\partial\tilde{\Gamma}}{\partial A_{2,2}}(x) = \frac{\partial\tilde{\Gamma}}{\partial A_{1,2}}(x) = 0 \Longleftrightarrow \frac{A}{\det A} = \frac{\det B}{r}B^{-1} \Longleftrightarrow A = rB^{-1}\,.$$

e) Qu'en concluez-vous sur les fonctions Γ et γ ?

PARTIE III

On cherche ici le minimum global sur $\mathcal{S}_d^+$ de la fonction γ lorsque d est quelconque. Dans cette partie C, D, P, R désignent des matrices $d \times d$.

1) Soit une matrice D diagonale à coefficients positifs ou nuls et une matrice P orthogonale vérifiant $P^{-1}BP = D$. On note alors R la matrice vérifiant $R_{i,i} = \sqrt{D_{i,i}}$ pour $1 \leq i \leq d$ et $R_{i,j} = 0$ pour $1 \leq i \neq j \leq d$. On pose enfin $C = PRP^{-1}$.

   a) Justifier l'existence de P et D.

   b) Montrer que $C \in \mathcal{S}_d^+$.

   c) Montrer que $B = C^2$.

   d) Si λ est une valeur propre de la matrice $CA^{-1}C$ associée au vecteur propre x, montrer que λ est aussi une valeur propre de la matrice $A^{-1}B$ associée au vecteur propre $C^{-1}x$.

   e) Montrer que $CA^{-1}C$ est une matrice diagonalisable et en déduire que $A^{-1}B$ et $\dfrac{1}{r}A^{-1}B$ sont aussi des matrices diagonalisables.

2) Montrer que :

$$\ln(\gamma(A)) - \ln(\gamma(r^{-1}B)) = -r \cdot \ln\left(\det\left(\frac{1}{r}A^{-1}B\right)\right) + r \cdot \operatorname{trace}\left(\frac{1}{r}A^{-1}B\right) - r \cdot d$$

($\ln(\cdot)$ désigne l'inverse de la fonction $\exp(\cdot)$).

3) On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ les valeurs propres de la matrice $\dfrac{1}{r}A^{-1}B$. Montrer que :

$$\ln(\gamma(A)) - \ln(\gamma(r^{-1}B)) = -r\sum_{i=1}^{d}(\ln(\lambda_i) - \lambda_i - 1)\,.$$

4) Montrer que la fonction γ n'a qu'un minimum global sur $\mathcal{S}_d^+$. Calculer sa valeur et le point où il est atteint.